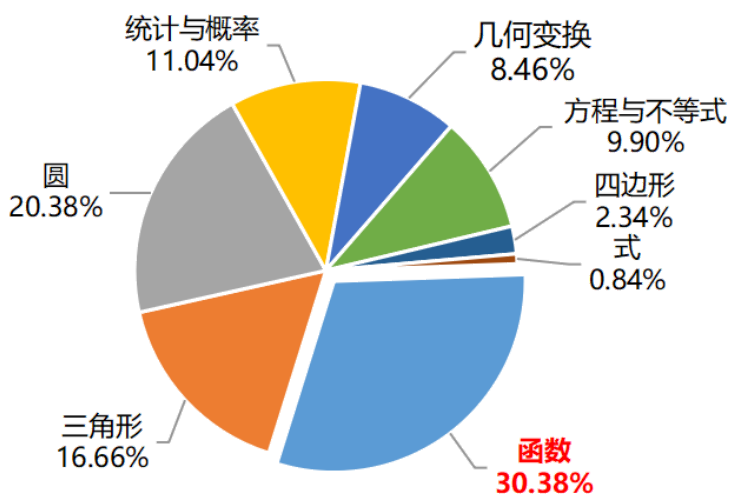


第1讲 二次函数区间最值问题

二次函数是人教版教材第二十二章的内容，在了解二次函数性质的基础上，还会与我们之前所学的代数及几何进行综合。本模块为《二次函数最值问题》，分类二次函数代数最值与几何最值两大类，重点涉及二次函数的性质与最短路径问题结合。

本模块难度较大，需要将二次函数的性质进行综合应用，本模块分为二次函数区间最值问题、二次函数之线段、面积问题、二次函数之将军饮马、胡不归问题3讲内容，加油站与讲义内容完全对照。

知己知彼



知识点	难度	考频
二次函数区间最值问题	★★★★★	中
二次函数单线段最值问题	★★★	中
二次函数面积最值问题	★★★★★	高
二次函数由面积求坐标问题	★★★★★	中
二次函数将军饮马问题	★★★★★	中
二次函数胡不归问题	★★★★★	中

知识回顾：

对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，当 x 的取值范围为全体实数时，当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，函数有最值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

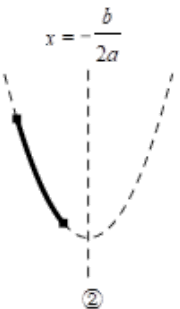
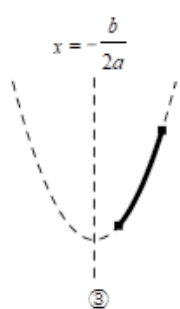
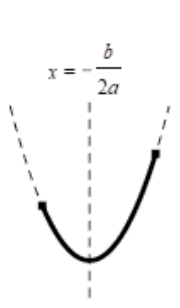
思考：

如将上述自变量取值范围改为“ $m \leq x \leq n$ ”，函数最值又该如何取得。

【思路点拨】

我们以 $a > 0$ 为例：

对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ ($y_{\max}$ 表示 y 的最大值, $y_{\min}$ 表示 y 的最小值)

图象	自变量取值范围	最小值	最大值
 ①	全体实数	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 取到最小值.	$\underline{\hspace{2cm}}$
 ②	$m \leq x \leq n < -\frac{b}{2a}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\min}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\max}$
 ③	$-\frac{b}{2a} < m \leq x \leq n$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\min}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\max}$
 ④	$m \leq x \leq n$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\min}$	$\textcircled{1} n + \frac{b}{2a} > \underline{\hspace{2cm}},$ 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $y = y_{\max}$ $\textcircled{2} n + \frac{b}{2a} < \underline{\hspace{2cm}},$ 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $y = y_{\max}$

! 总结：

对于二次函数区间最值问题，实质上就是讨论_____与_____的_____关系。

一、定轴定区间

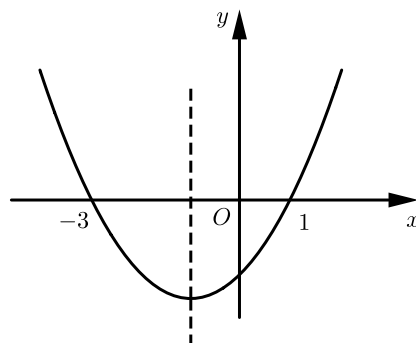
举个“栗”子

栗子1

1. 在平面直角坐标系中，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示，与 x 轴的交点分别为 $(-3, 0)$ 、 $(1, 0)$ ，且函数与 y 轴交点在 $(0, -1)$ 的下方，结合图象给出下列结论：

- ① $abc < 0$ ；
- ② $b^2 - 4ac < 4a$ ；
- ③ 当 $-2 \leq x \leq 3$ 时， y 的取值范围是 $-\frac{3}{2}b \leq y \leq 6b$ ；
- ④ $5a - b + 2c < -1$ ，

其中，正确的结论是（ ）。



- A. ①② B. ①③ C. ①④

D. ③④

栗子2

2. 求函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 在给定区间内的最大值和最小值。
- (1) 若 $1 \leq x \leq 2$ ，求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值。
 - (2) 若 $0 \leq x \leq 1$ ，求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值。
 - (3) 若 $-2 \leq x \leq 0$ ，求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值。

独步天下1

3. 已知点 $A(t, 1)$ 为函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b 为常数, 且 $a \neq 0$) 与 $y = x$ 图象的交点.
- (1) 求 t .
- (2) 若函数 $y = ax^2 + bx + 4$ 的图象与 x 轴只有一个交点, 求 a, b .
- (3) 若 $1 \leq a \leq 2$, 设当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 时, 函数 $y = ax^2 + bx + 4$ 的最大值为 m , 最小值为 n , 求 $m - n$ 的最小值.

二、定轴动区间

栗子3

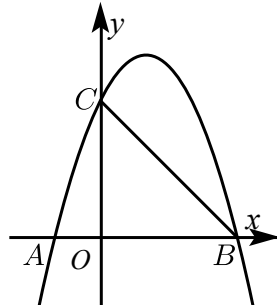
4. 已知抛物线 $C: y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 且关于直线 $x = 1$ 对称, 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$.
- (1) 求抛物线 C 的解析式和顶点坐标.
- (2) 将抛物线 C 绕点 O 顺时针旋转 180° 得抛物线 C' , 且有点 $P(m, t)$ 既在抛物线 C 上, 也在抛物线 C' 上, 求 m 的值.
- (3) 当 $a \leq x \leq a + 1$ 时, 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的最小值为 $2a$, 求 a 的值.

栗子4

5. 二次函数 $y = -(x-1)^2 + 5$, 当 $m \leq x \leq n$ 且 $mn < 0$, y 的最小值为 $2m$, 最大值为 $2n$, 则 $m+n$ 的值为 () .
- A. $\frac{5}{2}$ B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

独步天下2

6. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴分别交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C .



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 设点 $D(2, m)$ 在第一象限的抛物线上, 连接 BC , BD . 试问, 在对称轴左侧的抛物线上是否存在一点 P , 满足 $\angle PBC = \angle DBC$? 如果存在, 请求出点 P 的坐标; 如果不存在, 请说明理由 .
- (3) 存在正实数 m , $n (m < n)$, 当 $m \leq x \leq n$ 时, 恰好满足 $\frac{m}{m+3} \leq \frac{2}{y+2} \leq \frac{n}{n+3}$, 求 m , n 的值 .

三、动轴定区间

栗子5

7. 已知二次函数 $y = (x - h)^2 + 1$ (h 为常数), 在自变量 x 的值满足 $1 \leq x \leq 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 的最小值为 5, 则 h 的值为 ().

A. 1或-5 B. -1或5 C. 1或-3 D. 1或3

独步天下3

8. 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = x^2 - 2(k-1)x + k^2 - \frac{5}{2}k$ (k 为常数) .

(1) 当 $k = 2$ 时, 求该抛物线的解析式及顶点坐标 .

(2) 若抛物线经过点 $(1, k^2)$, 求 k 的值 .

(3) 若抛物线经过点 $(2k, y_1)$ 和点 $(2, y_2)$, 且 $y_1 > y_2$, 求 k 的取值范围 .

(4) 若将抛物线向右平移 1 个单位长度得到新抛物线, 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 新抛物线对应的函数有最小值 $-\frac{3}{2}$, 求 k 的值 .

四、动轴动区间

栗子6

9. 设 $a < -1$, $0 \leq x \leq -a - 1$, 且函数 $y = x^2 + ax$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$, 则常数 $a =$ _____ .

栗子7

10. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ (b, c 为常数) .

(1) 当 $b = 2$, $c = -3$ 时 , 求二次函数的最小值 .

(2) 当 $c = 5$ 时 , 若在函数值 $y = 1$ 的情况下 , 只有一个自变量 x 的值与其对应 , 求此时二次函数的解析式 .

(3) 当 $c = b^2$ 时 , 若在自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b + 3$ 的情况下 , 与其对应的函数值 y 的最小值为 21 , 求此时二次函数的解析式 .